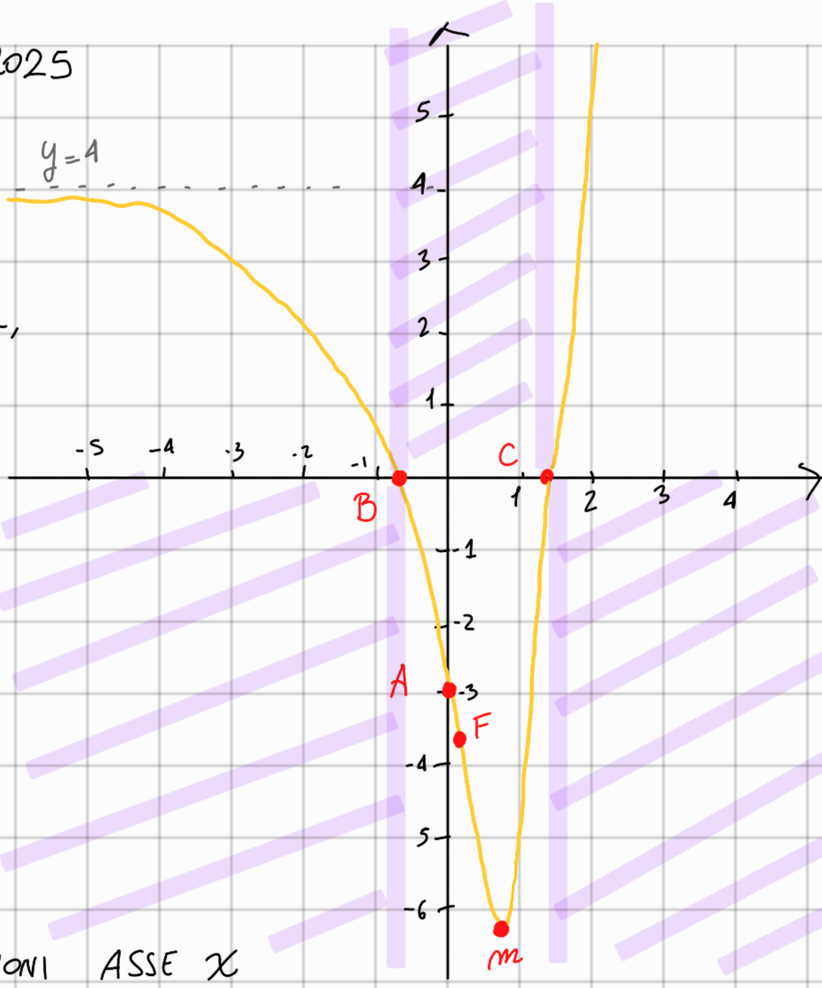
SOLUZIONE ESAME 21 FEBBRAIO 2025

ESERCIZIO 1 a. $f(x) = 2e^{2x} - 9e^{x} + 4$



■ DOMINIO : Non ci sono condizioni di esistenza,

$D = \mathbb{R}$

■ INTERSEZIONE ASSE y

$$f(0) = 2e^0 - 9e^0 + 4 =$$
$$= 2 - 9 + 4 = -3$$

$A = (0, -3) \rightarrow$ INTERSEZIONE ASSE y.

■ STUDIO DEL SEGNO e INTERSEZIONI ASSE x

Cerco per quali valori della variabile x $f(x)$ è maggiore o uguale a 0

CAMBIO VARIABILE

$$f(x) = 2(e^x)^2 - 9e^x + 4 \geq 0 \qquad \boxed{e^x = t}$$

$$2t^2 - 9t + 4 \geq 0$$

$$\Delta = 81 - 32 = 49$$

$$t_{1,2} = \frac{9 \pm 7}{4} \quad t_1 = \frac{9-7}{4} = \frac{1}{2} \quad t_2 = \frac{9+7}{4} = 4$$

$$t < \frac{1}{2} \ \vee \ t > 4$$

RISOSTITUISCO

$$e^x < \frac{1}{2} \quad \vee \quad e^x > 4$$

$$x < \ln\left(\tfrac{1}{2}\right) \ \vee \ x > \ln(4)$$

$$\begin{array}{ccccc} + & & - & & + \\ & \ln(\frac{1}{2}) & & \ln(4) & \end{array}$$

f è POSITIVA per $x \in (-\infty, \ln(\frac{1}{2})) \cup (\ln(4), +\infty)$

f è NEGATIVA per $x \in (\ln(\frac{1}{2}), \ln(4))$

f è NULLA per $x \in \{\ln(\frac{1}{2}), \ln(4)\}$

$\Downarrow$

CI SONO DUE P.TI DI INTERSEZIONE CON L'ASSE x

$$B = (\ln(\tfrac{1}{2}), 0) \simeq (-0.69, 0)$$
$$C = (\ln(4), 0) \simeq (1.39, 0)$$

■ LIMITI AGLI ESTREMI DEL DOMINIO: $D = (-\infty, +\infty)$

$$\lim_{x \to -\infty} 2\underbrace{e^{2x}}_{0} - 9\underbrace{e^{x}}_{0} + 4 = 4 \rightarrow y = 4 \text{ AS. OR. SX}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \underbrace{\boxed{2e^{2x}}}_{+\infty}\underbrace{\boxed{-9e^{x}}}_{-\infty}+4 = +\infty \quad \text{F.I}$$

PER CONFRONTO DI INFINITI "e^{2x}" è di ordine superiore rispetto a "e^x"

STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA, RICERCA DI MASSIMI E MINIMI

$$f'(x) = 2\cdot e^{2x}\cdot 2 - 9e^{x} = 4e^{2x} - 9e^{x}$$

$$4e^{2x} - 9e^{x} \geq 0$$

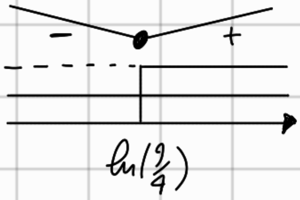
$$e^{x}(4e^{x} - 9) \geq 0$$

$e^{x} \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$4e^{x} - 9 \geq 0$

$e^{x} \geq \frac{9}{4}$

$x \geq \ln\left(\frac{9}{4}\right)$



- f è DECRESCENTE per $x \in \left(-\infty, \ln\left(\frac{9}{4}\right)\right)$
- f è CRESCENTE per $x \in \left(\ln\left(\frac{9}{4}\right), +\infty\right)$
- f è STAZIONARIA per $x = \ln\left(\frac{9}{4}\right)$ → p.to di minimo

$m = \left(\ln(9/4), \frac{49}{8}\right) \simeq (0.81, -6.125)$

$$\boxed{f\left(\ln\left(\tfrac{9}{4}\right)\right) = 2\left(\tfrac{9}{4}\right)^2 - 9\left(\tfrac{9}{4}\right) + 4 = \tfrac{81}{8} - \tfrac{81}{4} + 4 = \tfrac{81-162+32}{8} = \tfrac{49}{8}}$$

STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA SECONDA, CONCAVITÀ CONVESSITÀ E FLESSI

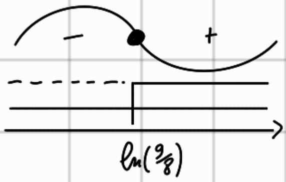
$$f''(x) = 8e^{2x} - 9e^{x} = e^{x}(8e^{x} - 9)$$

$e^{x} \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$8e^{x} - 9 \geq 0$

$e^{x} \geq 9/8$

$x \geq \ln\left(\frac{9}{8}\right)$



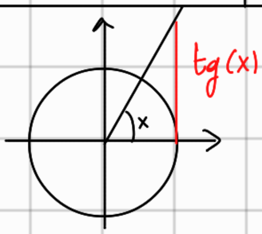
- f CONCAVA per $x \in \left(-\infty, \ln\left(\frac{9}{8}\right)\right)$
- f CONVESSA per $x \in \left(\ln(9/8), +\infty\right)$
- f PRESENTA UN P.TO DI FLESSO IN $x = \ln\left(\frac{9}{8}\right)$

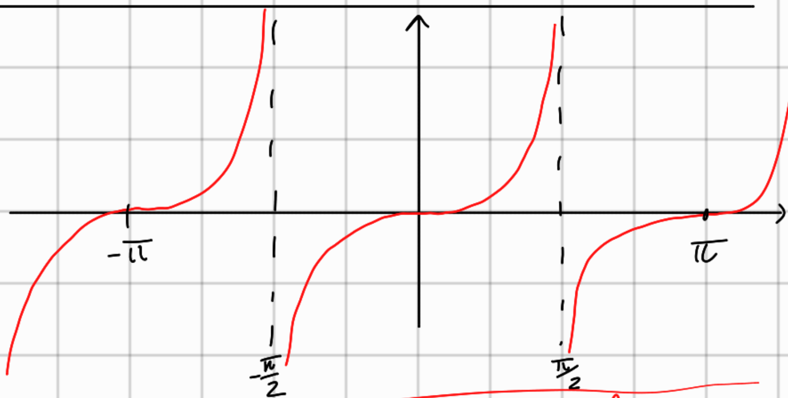
$F = \left(\ln(9/8), -\frac{115}{32}\right) \simeq (0.12, -3.59)$

$$f\left(\ln\left(\tfrac{9}{8}\right)\right) = 2\left(\tfrac{9}{8}\right)^2 - 9\left(\tfrac{9}{8}\right) + 4 = \tfrac{81}{32} - \tfrac{81}{8} + 4 = \tfrac{81-324+128}{32} = -\tfrac{115}{32}$$

---

b. $tg(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x}$





c. $$\lim_{x\to 0} \frac{3\sin(1-e^{x})}{e^{x}-1} = -3 \lim_{x\to 0} \frac{\sin(1-e^{x})}{1-e^{x}} = -3\cdot 1 = -3$$

$1-e^{x} \to 0$

OPPURE

$$\underset{\substack{DH \\ F.I.\ \frac{0}{0}}}{=} -3 \lim_{x\to 0} \frac{\cos(1-e^{x})\cancel{(-e^{x})}}{\cancel{-e^{x}}} = -3\underbrace{\cos(0)}_{=1} = -3$$

RICORDO, se $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\sin(f(x))}{f(x)} = 1$$

ESERCIZIO 2

a. $\displaystyle\int \frac{4x-5}{x^2-x-2}\,dx = \int \frac{4x-5}{(x+1)(x-2)}\,dx$

$\Delta = 1+8 = 9 > 0 \rightarrow$ DEVO SCOMPORRE IN SOMMA DI DUE FRAZIONI

$x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2}$ $\nearrow x_1 = -1$, $\searrow x_2 = 2$

Cerco due numeri $A, B \in \mathbb{R}$ tali che $\displaystyle\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} = \frac{4x-5}{(x+1)(x-2)}$

$$\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x+1)}{(x+1)(x-2)} = \frac{Ax-2A+Bx+B}{(x+1)(x-2)} = \frac{(A+B)x-2A+B}{(x+1)(x-2)}$$

$$\begin{cases} A+B=4 \\ -2A+B=-5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} B=4-A \\ -2A+4-A=-5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} " \\ -3A=-9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} B=4-3=1 \\ A=3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int \frac{4x-5}{x^2-x-2}\,dx = \int\left(\frac{3}{x+1}+\frac{1}{x-2}\right)dx = 3\int\frac{1}{x+1}\,dx + \int\frac{1}{x-2}\,dx = 3\ln|x+1| + \ln|x-2| + c$$

b. $$\int_0^{5/4} \frac{4x-5}{x^2-x-2}\,dx = \Big[3\ln|x+1| + \ln|x-2|\Big]_0^{5/4} = 3\ln\left|\tfrac{5}{4}+1\right| + \ln\left|\tfrac{5}{4}-2\right| - 3\ln|1| - \ln|-2| = 3\ln\left(\tfrac{9}{4}\right) + \ln\left|\tfrac{3}{4}\right| - \ln(2)$$

$$= \ln\left(\tfrac{9}{4}\right)^3 + \ln\left(\tfrac{3}{4}\right) - \ln(2) = \ln\left(\frac{9^3}{4^3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{3^7}{2^9}\right) \simeq 1.45$$

c. Data $f: D \to \mathbb{R}$ funzione, una sua primitiva $F(x)$ è una funzione tale che $\forall x \in D$ $F'(x) = f(x)$. Se $G(x)$ è una primitiva di f allora $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$.

ESERCIZIO 3

$E(t) = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$

Per cercare i p.ti di massimo calcolo la derivata prima e cerco i valori in cui si annulla

$E'(t) = \frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) = 0$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) = 0 \iff \frac{\pi}{2}t = k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

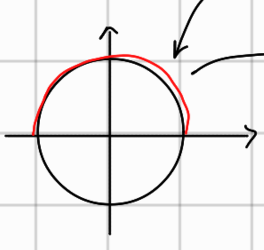
$t = 2k \rightarrow$ nell'intervallo $[0,4]$

ci sono tre p.ti stazionari: $0, 2, 4$

NE STUDIO IL SEGNO

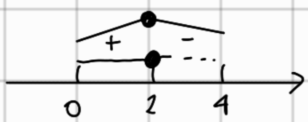
$E'(t) \geq 0$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \geq 0$



$0 \leq \frac{\pi}{2}t \leq \pi$

$0 \leq t \leq 2$



Si avrà il valore massimo nell'istante $t=2$

ESERCIZIO 4

a. Applichiamo un test del χ^2 di adattamento per verificare se le frequenze osservate sono compatibili con quelle attese

$$\begin{cases} H_0: \text{la mutazione non ha modificato la distribuzione} \rightarrow \begin{cases} P(AA) = \\ P(Aa) = 0.5 \\ P(aa) = 0.25 \end{cases} \\ H_1: \text{la mutazione ha modificato la distribuzione} \rightarrow \begin{cases} P(AA) \neq 0.25 \\ P(Aa) \neq 0.5 \\ P(aa) \neq 0.25 \end{cases} \end{cases}$$

Per calcolare il test ci servono le frequenze attese $E_i = m e_i$

$E_{AA} = 1000 \cdot 0.25 = 250$ $\qquad F_{AA} = 210$

$E_{Aa} = 1000 \cdot 0.5 = 500$ $\qquad F_{Aa} = 508$

$E_{aa} = 1000 \cdot 0.25 = 250$ $\qquad F_{aa} = 282$

$$\chi^2_2 = \sum_{i=1}^{3} \frac{(E_i - F_i)^2}{E_i} = \frac{(E_{AA} - F_{AA})^2}{E_{AA}} + \frac{(E_{Aa} - F_{Aa})^2}{E_{Aa}} + \frac{(E_{aa} - F_{aa})^2}{E_{aa}} = \frac{(250-208)^2}{250} + \frac{(500-508)^2}{500} + \frac{(250-282)^2}{250} =$$

Ci sono 3 categorie quindi $k=3$
$k-1=2$

$$= 6.4 + 0.128 + 4.096 = 10.624 > 9.210$$

ν \ α	0.1	0.05	0.01	0.001
2	4.605	5.991	9.210	13.816
	✓	✓	✓	✗

Possiamo affermare col 99% di confidenza che la mutazione ha modificato la distribuzione (favorendo aa rispetto ad AA)

b. $$\bar{x} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} x_i = \frac{1}{6} \left[9.5 + 15.0 + 12.5 + 11.0 + 7.5 + 10.5 \right] = \frac{1}{6} [66] = 11$$

Per la mediana riscrivo i dati riordinati: $7.5 \quad 9.5 \quad \boxed{10.5 \quad 11.0} \quad 12.5 \quad 15.0$

$$m = 6 \text{ è PARI} \rightarrow M = \frac{x^{(\frac{m}{2})} + x^{(\frac{m}{2}+1)}}{2} \quad \frac{x^{(3)} + x^{(4)}}{2} = \frac{10.5 + 11.0}{2} = 10.75$$

VARIANZA CAMPIONARIA

$$S^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^{m} (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{5} \left[(7.5-11)^2 + (9.5-11)^2 + (10.5-11)^2 + (11-11)^2 + (12.5-11)^2 + (15-11)^2 \right]$$

$$(3.5)^2 + (1.5)^2 + (0.5)^2 + 0 + (1.5)^2 + 4^2$$

$$= \frac{1}{5} \left[12.25 + 2.25 + 0.25 + 0 + 2.25 + 16 \right] = \frac{33}{5} = 6.6$$